پاسخ به سئوالات گزینش شده
درس سیستمهای صف

۱. اجزای سیستمهای صف زیر (نوع خدمت، خدمت دهنده، مشتری، صف، و جمعیت مشتریان) را مشخص کنید.

الف. بانک

ب. انبار ابزار کارخانه

ج. مرکز اورژانس شهر

د. جرثقیل هوایی در سالن کارخانه

ه. مخزن سد آب

و. خط تولید محصولی با سه نوع عملیات و یک مورد بازرسی در انتهای خط

ز. باجهٔ عوارض در ابتدای بزرگراه

۱)

الف) بانک: نوع خدمت: انجام خدمات پولی و اعتباری مشتریان
مشتری: افراد خدمت دهنده: کارمند بانک
صف: تعداد افرادی منتظر برای گیشه‌ها جمعیت مشتریان: کل مشتریان بانک

ب) انبار ابزار کارخانه: نوع خدمت: انبار کردن و تحویل ابزار
مشتری: ابزارآلات خدمت دهنده: مسئول انبار
صف: تعداد ابزاری که آماده انبار شدن هستند جمعیت مشتریان: کل ابزاری که تحویل انبار می‌شود

ج) مرکز اورژانس شهر: نوع خدمت: خدمات درمانی اورژانسی به بیماران
مشتری: بیماران خدمت دهنده: کارشناسان و مسئولان اورژانس به اضافه آمبولانس‌ها و وسایل
صف: تعداد تماس‌هایی که با اورژانس گرفته شده جمعیت مشتریان: کل مراجعان

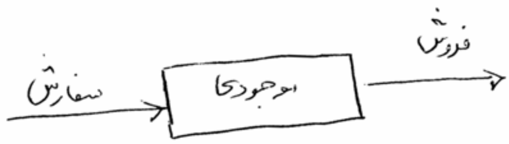
د) جرثقیل هوایی در سالن کارخانه: نوع خدمت: بلند کردن و انتقال تجهیزات
مشتری: تجهیزات خدمت دهنده: جرثقیل
صف: تعداد تجهیزاتی که باید جابجا شود جمعیت مشتریان: کل تجهیزات سالن کارخانه

ه) مخزن سد آب: نوع خدمت: عبور آب از دریچه‌های سد
مشتری: آب پشت سد خدمت دهنده: دریچه‌های سد
صف: میزان آب پشت سد جمعیت مشتریان: کل آب رودخانه

و) خط تولید: نوع خدمت: تولید و بازرسی
مشتری: کالای در حال ساخت خدمت دهنده: ابزار و افراد در تولید و بازرسی
صف: تعداد کالای در حال ساخت در خط جمعیت مشتریان: کل کالای در حال ساخت کارخانه

ز) باجهٔ عوارض بزرگراه: نوع خدمت: اخذ عوارض از وسایل نقلیه
مشتری: وسایل نقلیه خدمت دهنده: مسئول باجه اخذ عوارض
صف: تعداد ماشینهای منتظر پرداخت در گیشه‌ها جمعیت مشتریان: کل ماشینهای عبوری از بزرگراه

۴. سیستم انبارداری محصولی را درنظر بگیرید، که تعداد موجودی آن محصول به‌اضافه تعدادی که سفارش داده‌شده‌است، همیشه برابر با N باشد. به‌عبارت دیگر، موقعی که یك واحد محصول فروخته می‌شود، بلافاصله برای جایگزینی آن واحدی دیگر از محصول سفارش داده شود. سیستم صفی را برای این مسئله تعریف کنید. خدمت‌دهنده، مشتری، نظم سیستم، زمان بین دو ورود مشتریها،و مدت‌زمان خدمت را مشخص کنید.



N = موجودی محصول + سفارش

خدمت‌دهنده: فروش = سیستم انبار

مشتری : مشتری واحد فروش = سفارش

نظم سیستم: FIFO

زمان بین دو ورود: زمان بین دو فروش = زمان بین دو سفارش

مدت زمان خدمت: تفاوت تقریباً صفر یعنی زمان خدمت = زمان بین دو ورود

تعداد صف‌ها در سیستم: N

این سیستم، سیستم صف مدیریت انبارها است که در آن مدت زمان خدمت = زمان بین دو ورود مشتری = زمان بین دو ورود سفارش

- در مسئله زیر

الف) نمودار ورود و خروج را رسم کنید

ب) متوسط زمان انتظار در صف و انحراف معیار آن را محاسبه کنید

ج) متوسط طول صف و و انحراف معیار آن را محاسبه کنید

د) متوسط انحراف از تعهد و و انحراف معیار آن را محاسبه کنید

ي) متوسط زمان انتظار در سیستم و انحراف معیار آن را محاسبه کنید

از 9:00 **تا** 12:00

مشتري	زمان ورود	زمان خروج از صف	خروج از سیستم	موعد تحویل
1	9:03	9:03	9:23	10:00
2	10	9:23	55	10:00
3	40	9:55	10:35	11:00

4	10:05	10:35	50	11:00
5	15	10:50	11:20	11:00
6	40	11:20	35	12:00
7	11:50	11:50	12:20	1:00

بر اساس اطلاعات فوق فرمول little **را براي مشتريان صف و سيستم محاسبه نماييد**

نرخ بهره برداري از سرويس دهنده را تعيين نماييد.

$$W_q = 19 \text{ min}, \ \sigma_{W_q} = 15 \text{ min}$$

$$E \text{ (tardiness)} = 2.9 \text{ min}, \ SD \text{ (tardiness)} = 7.0 \text{ min}$$

$$L_q = .74, \ \sigma_{L_q} = .72$$

$$L_s = 1.64, \ \sigma_{L_s} = .87$$

$$.74 = (7/180)(19)$$

$$1.64 \neq (7/180)(45) = 1.75$$

$$\rho = .90, \text{ throughput} = 2/\text{hr}$$

Mohammad Izadkhah Takehome#1

	ورود	خروج	تعداد صف	زمان	طول صف * زمان	
09:00	0	0	0	00:03	00:00	
09:03	1	1	0	00:07	00:00	
09:10	1	0	1	00:13	00:13	
09:23	0	1	0	00:17	00:00	
09:40	1	0	1	00:15	00:15	
09:55	0	1	0	00:10	00:00	
10:05	1	0	1	00:10	00:10	
10:15	1	0	2	00:20	00:40	
10:35	0	1	1	00:05	00:05	
10:40	1	0	2	00:10	00:20	
10:50	0	1	1	00:30	00:30	
11:20	0	1	0	00:30	00:00	
11:50	1	1	0	00:10	00:00	
12:00	0	0	0	Total	02:13	
					03:00	
				Lq	0.738889	ave
					0.725	var

	ورود سيستم	خروج سيستم	تعداد صف	زمان	طول صف * زمان	
09:00	0	0	0			
09:03	0		0	00:07	00:00	
09:10	1		1	00:13	00:13	
09:23	1	1	1	00:17	00:17	
09:40	0		1	00:15	00:15	
09:55	1	1	1	00:10	00:10	
10:05	0		1	00:10	00:10	
10:15	1		2	00:20	00:40	
10:35	1	1	2	00:05	00:10	
10:40	0		2	00:10	00:20	
10:50	1	1	2	00:30	01:00	
11:20	0	1	1	00:15	00:15	
11:35	0	1	0	00:15	00:00	
11:50	1		1	00:30	00:30	
12:20	0	1	0	00:00	00:00	
12:20	0	0	0	Total	04:00	
					03:20	
				Ls	1.2	ave
					0.629	var

	ورود به سيستم	خروج از صف	خروج از سيستم			متوسط زمان انتظار در صف	متوسط زمان انتظار در سيستم	
1	09:03	09:03	09:23	10:00		00:00	00:20	
2	09:10	09:23	09:55	10:00		00:13	00:45	
3	09:40	09:55	10:35	11:00		00:15	00:55	
4	10:05	10:35	10:50	11:00		00:30	00:45	
5	10:15	10:50	11:20	11:00		00:35	01:05	
6	10:40	11:20	11:35	12:00		00:40	00:55	
7	11:50	11:50	12:20	13:00		00:00	00:30	
						02:13	05:15	
					Ave	00:19	00:45	min
						Wq	Ws	
					var	14.9	14.39	min

۶۵. یک متغیر تصادفی در فاصله (۱، ۱−) دارای تابع چگالی $C(1-X^2)$ است. مقدار C را تعیین کنید. تابع توزیع این متغیر تصادفی را محاسبه کنید. احتمال اینکه X بین صفر تا ۰٫۷۵ باشد، چقدر است؟

C= ¾=0.75

In[1]:= $\int_{-1}^{t} .75\,(1-x^2)\,dx$

Out[1]= $-0.25\,(-2.+t)\,(1.+t)^2$

In[2]:= $\int_{0}^{.75} .75\,(1-x^2)\,dx$

Out[2]= 0.457031

۲۳. اگر X یک متغیر تصادفی با توزیع نمایی باشد، $E(X|X>1)$ را محاسبه کنید.

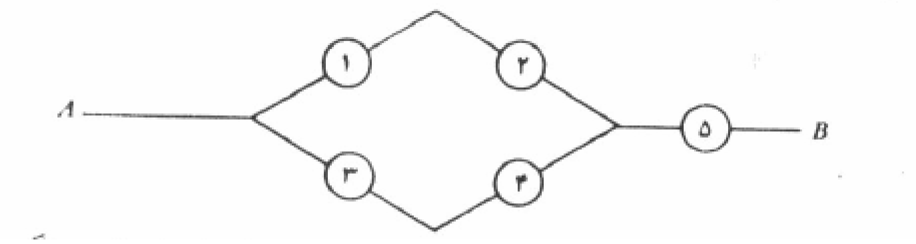
از آنجا که داریم

$$P\{X > s + t \mid X > t\} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(X > s)$$

لذا

$$\int_{1}^{\infty} x\,\left(\lambda\,\left(e^{-\lambda\,(x)}\right)\right)\,dx = \frac{e^{-\lambda}\,(1+\lambda)}{\lambda}$$

۲۷. یک مدار برقی در شکل نشان داده شده است. در طول یک آزمایش، جزء شمارهٔ i $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ به‌احتمال P_i از کار می‌افتد وعبور جریان از آن امکان‌ندارد. احتمال اینکه در انتهای آزمایش جریان از A به B عبور کند، چقدر است؟



Probability of flow = $(1-P_5)\,[1-(1-q_1)\,(1-q_2)]$

$q_1 = 1-(1-P_1)\,(1-P_2)$

$q_2 = 1-(1-P_3)\,(1-P_4)$

۳۸. در کارخانه‌ای یك نمونهٔ سه‌تایی از کالایی برای بازرسی انتخاب شده است. اگر در این کارخانه ۵ خط تولید مشابه وجود داشته باشد، احتمال اینکه این کالاها از خطوط مختلف انتخاب‌شده باشد، چقدر است؟ (یا به‌عبارت دیگر احتمال اینکه دو عدد یا بیشتر کالا روی یك خط تولید نشده باشد، چقدر است؟

احتمال آنکه انتخاب دوم و سوم مانند انتخاب اول باشند **(1/5)(1/5)**

احتمال آنکه انتخاب دوم یا سوم مانند انتخاب اول باشند **(4/5)(1/5)*2**

احتمال آنکه دوم و سوم مانند هم باشند **(1/4)(1/4)**

احتمال آنکه دو انتخاب یا سه انتخاب مانند انتخاب اول نباشند

1-[(1/5)(1/5)+ (4/5)(1/5)*2+(1/4)(1/4)]= 231/400

۳۱. معادلهٔ تفاضلی زیر را حل کنید.

$$p_{n+2}-5p_{n+1}+6p_n=0$$

که $p_0=0$ و $p_1=1$ است.

$$P_{n+2}-5P_{n+1}+6P_n=0 \qquad P_1=1 \quad , P_0=0$$

$$P(Z)=\sum_{n=0}^{\infty} P_n Z^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{n+2} Z^n-5\sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1} Z^n+6\sum_{n=0}^{\infty} P_n Z^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{n+2} Z^n=\frac{1}{Z^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n Z^n-P_0-P_1 Z\right]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1} Z^n=\frac{1}{Z}\left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n Z^n-P_0\right]$$

$$\frac{1}{Z^2}\left[P(Z)-P_0-P_1 Z\right]-\frac{5}{Z}\left[P(Z)-P_0\right]+6P(Z)=0$$

$$P(Z)\left[\frac{1}{Z^2}-\frac{5}{Z}+6\right]+P_0\left[-\frac{1}{Z^2}+\frac{5}{Z}\right]-\frac{1}{Z}P_1=0$$

با ضرب نمودن کل رابطه در مقدار Z^2 داریم و با ترتیب $P_0=0$ و $P_1=1$

$$P(Z)=\frac{Z}{1-5Z+6Z^2}$$

$$P_0=P(Z)\Big|_{Z=0}=0$$

$$P_1=\frac{\partial P(Z)}{\partial Z}\Big|_{Z=0}=\frac{Z(-5+12Z)}{(1-5Z+6Z^2)^2}+\frac{1}{1-5Z+6Z^2}=1$$

$$P_2=\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 P(Z)}{\partial^2 Z^2}\Big|_{Z=0}=-\frac{2(-5+12Z)}{(1-5Z+6Z^2)^2}+Z\left[\frac{2(-5+12Z)^2}{(1-5Z+6Z^2)^2}-\frac{12}{(1-5Z+6Z^2)^2}\right]$$

$$=10$$

فصل سوم

۱. مدت تعمیر ماشینی براساس توزیع نمایی و میانگین یک و نیم ساعت است. احتمال اینکه تعمیر این ماشین بیش‌از ۱۲ ساعت طول بکشد چقدر است؟ احتمال اینکه تعمیر ماشین بیش از ۱۲ ساعت طول بکشد، درحالی‌که می‌دانیم تا این لحظه ۱۱ ساعت طول کشیده، چقدر است؟

$$\lambda = \frac{1\ m}{1.5\ hr} = 2/3\ m/hr$$

$$P(x > 12hr) = e^{-\lambda x} = e^{-2/3 \times 12} = e^{-8} = 0.000335$$

$$P(x > 12 \mid x > 11) = P(x > 1) = e^{-2/3 \times 1} = e^{-2/3} = 0.513$$

۲. در یک آزمایش‌که ۴ ساعت به‌طول می‌انجامد، از لامپی استفاده می‌شود که عمر آن متغیری تصادفی با میانگین ۵ ساعت است. احتمال اینکه قبل‌از پایان آزمایش، این‌لامپ نسوزد را در چهار حالت زیر حساب‌کنید:

الف. عمر لامپ دارای توزیع نمایی است، و لامپ، نو است.
ب. عمر لامپ دارای توزیع نمایی است، و لامپ، قبلا ۵ ساعت کار کرده است.
ج. عمر لامپ دارای توزیع یکنواخت (روی فاصلهٔ صفر تا ۱۰ ساعت است)، و لامپ نو، است.
د. عمر لامپ دارای توزیع یکنواخت (روی فاصلهٔ صفر تا ۱۰ ساعت است)، و لامپ‌قبلا ۵ ساعت کارکرده است.

$$P(x \ge 4) = \int_4^\infty \lambda e^{-\lambda x} x dx = \left[e^{-\lambda x}\right]_4^\infty = e^{-(1/5)(4)}$$

$$P(x \ge 4+5 \mid x \ge 5) = P(x \ge 4) = \int_4^\infty \lambda e^{-\lambda x} x dx = \left[e^{-\lambda x}\right]_4^\infty = e^{-(1/5)(4)}$$

$$P(x \ge 4) = \int_4^\infty \frac{1}{10} dx = \left[\frac{1}{10}x\right]_4^{10} = 0.6$$

$$P(x \ge 4) = \int_{5+4}^\infty \frac{1}{10} dx = \left[\frac{1}{10}x\right]_9^{10} = 0.1$$

۳. تعداد تصادفات یک‌جاده براساس فرایند پواسون است. فرض می‌شود که به‌طورمتوسط هر دو ساعت یک‌بار یک تصادف اتفاق می‌افتد. احتمال اینکه بین ساعت ۸ تا ۸:۲۰ حداقل سه تصادف اتفاق بیفتد، چقدر است؟ احتمال اینکه در ۲۴ ساعت تصادفی نباشد، چقدر است؟

$\lambda = 1/2$ accident per hour

$\lambda t = (1/2) * (20/60) = 1/6$,

$$P\{N(t) = n\} = \frac{\lambda t^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

$$P\{N(t) > 3\} = 1 - P\{N(t) \le 3\} = 1 - P\{N(t) = 0\} - P\{N(t) = 1\} - P\{N(t) = 2\} - P\{N(t) = 3\}$$

$\lambda t = (1/2) * 24 = 12$

$P\{N(t) = 0\}$

۵. دو نوع جزوهٔ درسی برای تکثیر به‌چاپخانه فرستاده می‌شود. نوع الف که تعدادنسخهٔ معدودی از آن لازم است، و نوع ب کــه تعداد زیادی نسخه از آن گرفته می‌شود. تعداد جزوه‌هایی که به‌چاپخانه می‌رسد، براساس فرایندپواسون با میانگین ۱۶ عدد از نوع الف و ۱۰ عدد از نوع ب در هر ساعت است. اگر الان ساعت ۱۰:۳۸ باشد و بدانیم کــه آخرین جزوهٔ نوع الف در ساعت ۱۰:۲۵ و آخرین جزوهٔ نوع ب در ساعت ۱۰:۱۸ به‌چاپخانه رسیده است،

الف. احتمال اینکه تا ساعت ۱۰:۴۰ سه جزوه به‌چاپخانه برسد، چقدر است؟

ب. احتمال اینکه تا ساعت ۱۰:۴۰ دوجزوهٔ نوع الف و یك‌جزوهٔ نوع ب برسد، چقدر است؟

ج. احتمال اینکه اولین جزوه‌ای که به‌چاپخانه می‌رسد از نوع الف باشد، چقدر است؟

د. آیا در فاصلهٔ بین آمدن دو جزوهٔ فوق (یعنی در ساعتهای ۱۰:۱۸ و ۱۰:۲۵) ممکن است سه جزوهٔ دیگرهم به‌چاپخانه رسیده باشد؟ احتمال آن چقدر است؟

ه. اگرتا ساعت ۹ تعداد ۱۲ جزوه از نوع الف رسیده باشد، میانگین کل تعدادجزوه‌های رسیده به‌چاپخانه تا ساعت ۹ چقدر است؟ (فرض می‌کنیم وقت شروع‌کارسیستم ساعت ۷ بوده است).

جواب : می دانیم که

قضیهٔ ۳.۳ اگر $N_1(t)$ و $N_2(t)$ فرایندهای پواسون با پارامترهای به ترتیب λ_1 و λ_2 باشند، در این‌صورت فرایند $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ نیز فرایند پواسون، بـا پارامتر $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ خواهد بود.

۵) الف)

$\lambda_1 = \frac{6P}{hr} = 4/15 \; P/min$ $\qquad \lambda_2 = 10 \; P/hr = 1/6 \; P/min$

$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 4/15 + 1/6 = 13/30$ $\qquad t = 2min \qquad \lambda t = 13/30 \times 2 = 13/15$

$$P[N(t) = 3] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^3}{3!} = 0.0456$$

ب-

جزوهٔ الف $\lambda_1 t = 32/60 = 8/15$

$\lambda_2 t = 20/60 = 1/3$

$$f_1(2) * f_2(1) = \left[\frac{(8/15)^2}{2!} e^{-8/15}\right]\left[\frac{(1/3)}{1!} e^{-1/3}\right] =$$

ج-

$$P = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{16}{16+10}$$

د- یعنی احتمال آنکه جزوه دوم در این فاصله سه عدد تحویل شده باشد و در لحظه آخر نیز یک عدد دیگر تحویل شده است در مجموع 4 عدد

$$\lambda t = (10)\ \frac{7}{60} = \frac{7}{6}$$ د-

$$f_2(4) = \left[\frac{(7/6)^4}{4!} e^{-7/6}\right]$$

ه -

$$E(N_2(t)) = \lambda_2 t = 10 \times 2 = 20$$ هـ

$$(20+12) = 32$$

۶. از جاده‌ای که عرض آن تقریباً معادل یك اتومبیل است، اتومبیلها طبق فرایند پواسون (با میانگین سه اتومبیل در هر دقیقه)، عبور می‌کنند. شخصی بدون توجه به اتومبیلها، عرض جاده را در ۱۰ ثانیه طی می‌کند. احتمال اینکه سالم از جاده بگذرد، چقدر است؟

۶ فاصله زمانی بین دو عبور اتومبیل توزیع نمایی می‌باشد در نتیجه :

$$P(X>10) = e^{-\lambda x}$$

$$\lambda = 3\ \mathrm{Car/min} \times \frac{1\ \mathrm{min}}{60\ \mathrm{s}} = 1/20\ \mathrm{Car/s}$$

$$P(X>10) = e^{-1/20 \times 10} = e^{-0.5}$$