Stochastic Process

سیستم ها در زمان تغییر می کنند و رفتار دینامیکی از خود نشان می گذارند.

- طول صف
- تعداد دانشجویانی که درس را قبول می شوند.
- دمای محیط
- تعداد packet داده در شبکه

- فرایند تصادفی X_t یا $x(t)$ خانواده ای از متغیرهای تصادفی است که با پارامتر t اندیس گذاری می شوند.

- فرایند تصادفی در واقع تصویر map یک فضای نمونه S به توابع با پارامتر t است

یک عنصر e (element) از فضای S دارای تابع $X_t(e)$

مثلا: یک قرعه (کارت کشی آزمایش) e دارای تابع $X_t(e)$ احتمال درآمد در هر برداشت t

- برای هر عنصر معلوم e ، $X_t(e)$ تابع زمان است.
- برای هر مقدار معلوم t ، $X_t(e)$ یک متغیر تصادفی است
- برای هر مقدار e و t معلوم، $X_t(e)$ یک عدد ثابت (Fix) است.

تابع $X_t(e)$ برای هر مقدار معلوم e را مسیر نمونه (Sample path) می خوانند.

تعاریف

فضای حالت: مجموعه حالتهای ممکن X_t — State space

فضای پارامتر: مجموعه مقادیر t — Parameter space

Jamshid Nazemi

Subject:
Year. Month. Date. ( )

فرآیند تصادفی را می‌توان گسسته یا پیوسته خواند اگر فضای پارامتر گسسته یا پیوسته باشد

پارامتر فضا	فضای حالت: گسسته	فضای حالت: پیوسته
گسسته	1	2
پیوسته	3	4

- اگر پارامترها مورد بررسی به طور معمول گفته می‌شود فرآیند تصادفی با زمان پیوسته یا زمان گسسته.
- فرآیند تصادفی با زمان گسسته را معمولاً توالی تصادفی Random sequence می‌خوانند.

در مورد فرآیندهای تصادفی موارد زیر معمولاً مورد نظر است.

- Time dependent distribution: احتمال اینکه X_t مقدار مشخصی را در زمان t بگیرد.
- stationary distribution: احتمال اینکه X_t مقدار مشخصی را در زمان ∞ بگیرد.
- Relationship: رابطه بین X_{t_1} و X_{t_2} برای زمانهای متفاوت t_1 و t_2
- Hitting probability: احتمال وقوع یک حالت مشخص
- First passage time: لحظه ورود فرآیند تصادفی به یک حالت خاص از یک شرایط اولیه

Jamshid Nazemi

فرآیند

فرآیند مارکوف

یک فرآیند تصادفی، فرآیند مارکوف است اگر:

$$P\{X_{t_n} < x_n \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \dots, X_{t_1} = x_1\} = P\{X_{t_n} \le x_n \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1}\}$$

۱ - آینده یک فرآیند تصادفی با داشتن حالت جاری $X_{t_{n-1}}$ و گذشته قبل از t_{n-1} فقط به حالت جاری آن وابسته است (نه به چگونگی رسیدن به وضعیت جاری)

۲ - حالت جاری کلیه اطلاعات گذشته را که برای ساختن آینده لازم است، دارد.

مثال: فرآیند تعداد رشد مستقل همواره فرآیند تصادفی است.

$$\left[X_{t_n} = X_{t_{n-1}} + \dots \right] \left(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \right)$$

مقدار رشد مستقل

زنجیره مارکوف

- برای بهره‌برداری و کاربرد زنجیره مارکوف به زنجیره‌های گسسته زمان یا حالت باز می‌گردد.

- معمولاً برای عمومی شدن کار در زنجیره به جای زمان از اعداد طبیعی استفاده می‌شود.

$- \ X_n, \quad n = 0, 1, \dots$

$$P_{ij} = P\{X_n = j \mid X_{n-1} = i\}$$

احتمال یک مسیر:

$$P\{X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\} = P\{X_0 = i_0\} P_{i_0 i_1} P_{i_1 i_2} \dots P_{i_{n-1} i_n}$$

State probability

$\pi_i^{(n)} = P\{X_n = i\}$ احتمال فرآیند در حالت i در زمان n

$\pi^{(n)} = (\pi_0^{(n)}, \pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \dots)$ احتمال حالتها در بردار "احتمال وضعیت"

طبق قوانین احتمال:

$$P\{X_1=i\} = \sum_K P\{X_1=i \mid X_0=K\} P\{X_0=K\}$$

بنابراین

$$\pi_i^{(1)} = \sum_K \pi_K^{(0)} P_{K,i} \quad \text{یا} \quad \pi^{(1)} = \pi^{(0)} P$$

بدلیل آنکه فرآیند مارکوف است لذا $\pi^{(1)}$ احتمال اولیه برای مرحله بعد است

$$\pi^{(2)} = \pi^{(1)} P \Rightarrow \pi^{(n)} = \pi^{(n-1)} P$$

نتیجه می‌گیریم: $\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n$

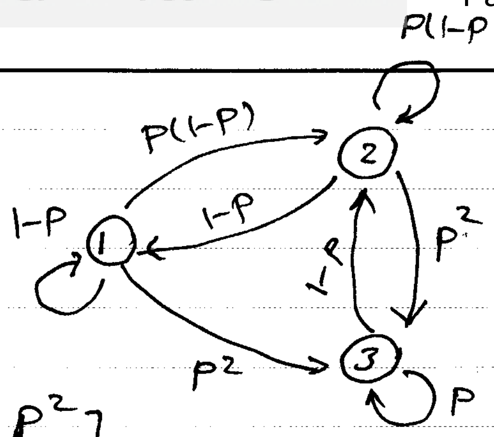
که در آن P^n، ماتریس انتقال مرحله n ام است.

Jamshid Nazemi

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال



$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 1-P & P(1-P) & P^2 \\ 1-P & P(1-P) & P^2 \\ 0 & 1-P & P \end{bmatrix} \qquad P = 1/3$$

$$P = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P^2 = \frac{1}{9^2}\begin{bmatrix} 48 & 22 & 11 \\ 48 & 22 & 11 \\ 36 & 30 & 15 \end{bmatrix} \qquad P^3 = \frac{1}{9^3}\begin{bmatrix} 420 & 206 & 103 \\ 420 & 206 & 103 \\ 396 & 222 & 111 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$P^3 = \begin{bmatrix} 0.576 & 0.282 & 0.141 \\ 0.576 & 0.282 & 0.141 \\ 0.543 & 0.304 & 0.152 \end{bmatrix}$$

$$P^{6} = \begin{bmatrix} 0.5714 & 0.2857 & 0.1429 \\ 0.5714 & 0.2857 & 0.1429 \\ 0.5714 & 0.2857 & 0.1429 \end{bmatrix}$$

بعد از ۶ مرحله، وضعیت نهایی مستقل از شرایط اولیه است. (دقت چهار رقم اعشار)

"یعنی فرآیند وضعیت اولیه خود را از یاد می‌برد"

Stationary distribution حالت پایا

طبق قضیه Kolmogorov برای یک زنجیره مارکوف برگشت‌ناپذیر

$$\pi = \pi \cdot P \quad \text{یا} \quad \pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}$$

$$\sum_j \pi_j = 1$$

این رابطه را شرایط تعادلی نیز می‌خوانند.

مثال:

$$(\pi_0 \;\; \pi_1 \;\; \pi_2) = (\pi_0 \;\; \pi_1 \;\; \pi_2) \begin{pmatrix} 1-p & p(1-p) & p^2 \\ 1-p & p(1-p) & p^2 \\ 0 & 1-p & p \end{pmatrix}$$

$$\pi_0 = (1-p)\pi_0 + (1-p)\pi_1 \quad \Rightarrow \quad \pi_0 = \frac{1-p}{p}\pi_1$$

$$\pi_1 = p(1-p)\pi_0 + p(1-p)\pi_1 + (1-p)\pi_2$$

$$= (1-p)\pi_1 + (1-p)\pi_2 \quad \Rightarrow \quad \pi_1 = \frac{1-p}{p}\pi_2$$

$$\pi_0 = \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 \pi_2$$

یا

$$\pi = \left(\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 \quad \frac{1-p}{p} \quad 1 \right) \pi_2$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\pi = \left(\frac{(1-p)^2}{1-p(1-p)} \quad \frac{p(1-p)}{1-p(1-p)} \quad \frac{p^2}{1-p(1-p)} \right) \quad p = 1/3$$

$$\pi = (0.5714 \quad 0.2857 \quad 0.1429)$$

برای حل این سیستم توسط کامپیوتر:

اگر e را تعریف کنیم که $\pi . e^T = 1$

و رابطه را درست کنیم $\pi . E = e$

که در آن

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

همه عناصر 1 هستند

$$\pi . \underline{P} = \pi \Rightarrow \pi . (\underline{P} + E - I) = e$$

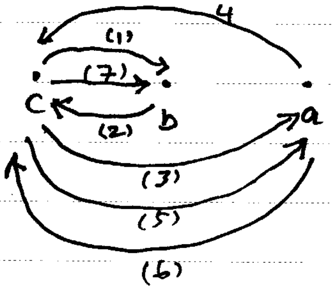
$$\pi = e(P + E - I)^{-1}$$

Jamshid Nazemi

مثال، فرض کنید $X=\{X_n, n\in N_0\}$ یک زنجیره مارکوف با فضای حالت $E=\{a,b,c\}$ با ماتریس انتقال زیر است،

$$P=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 3/5 & 2/5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P\{X_1=b, X_2=c, X_3=a, X_4=c, X_5=a, X_6=c, X_7=b \mid X_0=c\}$$
$$=P(c,b)\,P(b,c)\,P(c,a)\,P(a,c)\,P(c,a)\,P(a,c)\,P(c,b)$$
$$=(2/5)(1/3)(3/5)(1/4)(3/5)(1/4)(2/5)=\frac{3}{2500}$$



$$P^2=\begin{bmatrix} 17/30 & 9/40 & 5/24 \\ 8/15 & 3/10 & 1/6 \\ 17/30 & 3/20 & 17/60 \end{bmatrix}$$

$$P\{X^{(2)}=c \mid X^{(1)}=b\}=P^2(b,c)=1/6$$

مثال: X یک زنجیره مارکوف با فضای حالت $E=\{1,2\}$ و توزیع اولیه $\pi=(1/3, 2/3)$،
ماتریس انتقال زیر است:

$$P=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$P^2=\begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.36 & 0.64 \end{bmatrix} \qquad P^3=\begin{bmatrix} 0.38 & 0.62 \\ 0.372 & 0.628 \end{bmatrix} \qquad P^3=\begin{bmatrix} 0.376 & 0.624 \\ 0.374 & 0.625 \end{bmatrix}$$

$$P^m=\begin{bmatrix} 3/8+5/8(0.2)^m & 5/8-5/8(0.2)^m \\ 3/8-3/8(0.2)^m & 5/8+3/8(0.2)^m \end{bmatrix}$$

Jamshid Nazemi

$$P\{X_1=2, X_3=1, X_6=1, X_{18}=1 \mid X_0=1\}$$
$$= P_{1,2}\, P_{2,1}^{3}\, P_{1,1}^{2}\, P_{1,1}^{12} = (0.5)(0.372)(0.4)\left[\tfrac{3}{8}+\tfrac{5}{8}(0.2)^{12}\right]$$

$$P\{X_2=1, X_7=2, X_9=2 \mid X_0=1\} = P_{1,1}^{2}\, P_{1,2}^{5}\, P_{2,2}^{2}$$
$$= (0.4)\left(\tfrac{5}{8}-\tfrac{5}{8}(0.2)^5\right)(0.64)$$

$$P\{X_2=1, X_7=2\} = \sum_i P\{X_0=i\}\, P\{X_2=1, X_7=2 \mid X_0=i\}$$

$$= \pi_1\, P_{1,1}^{2}\, P_{1,2}^{5} + \pi_2\, P_{2,1}^{2}\, P_{1,2}^{5}$$
$$= \tfrac{1}{3}(0.4)\left(\tfrac{5}{8}-\tfrac{5}{8}(0.2)^5\right) + \tfrac{2}{3}(0.36)\left(\tfrac{5}{8}-\tfrac{5}{8}(0.2)^5\right)$$

مثال: اگر T_n ، زمان n امین موفقیت در یک فرآیند برنولی باشد. این فرآیند زنجیره مارکوف است.

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 0 & pq & pq^2 & pq^3 & \cdots \\ 0 & p & pq & pq^2 & \\ & 0 & p & pq & \\ & & \ddots & & \ddots \\ & & & 0 & \vdots \end{bmatrix}$$

$$P\{i,j\} = P\{T_{n+1}=j \mid T_n=i\} = \begin{cases} pq^{j-i+1} & j \geq i+1 \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

مثال: اگر فرآیند تجربه‌های مستقل را با X_0 ، X_2 ... : متغیر تصادفی گسسته مستقل نمادگذاری کنیم که

$$P\{X_n=K\} = \begin{cases} \pi(K) & K=0,1,2,\ldots \\ 0 & K<0 \end{cases}$$

از آنجا که:
$$P\{X_{n+1}=j \mid X_0, X_1, \ldots, X_n\} = P\{X_{n+1}=j\} = \pi(j)$$

لذا هر رشته دنباله زنجیره مارکوف است

$$P\{X_{n+1}=j \mid X_n\} = P\{X_{n+1}=j\} = \pi(j)$$

$$P = \begin{bmatrix} \pi(0) & \pi(1) & \pi(2) & \cdots \\ \pi(0) & \pi(1) & \pi(2) & \\ \pi(0) & \pi(1) & \pi(2) & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

در این ماتریس همه سطرها با هم برابرند

P4PCO

زنجیرهٔ مارکوف - تعاریف و قضایای پایه

قضیه - برای هر $n,m \in N$ با $m \geq 1$ و $i_0, \dots, i_m \in E$

$$P\{X_{n+1}=i_1, \dots, X_{n+m}=i_m \mid X_0=i_0\} = P_{i_0 i_1} P_{i_1 i_2} \cdots P_{i_{m-1} i_m}$$

قضیه فرعی - اگر π یک توزیع احتمال در E باشد، برای همه مقادیر $i \in E$

اگر $n=0$ باشد آنگاه $P\{X_0=i\}=\pi_i$

در این صورت برای هر $m \in N$

$$P\{X_0=i_0, X_1=i_1, \dots, X_m=i_m\} = \pi_{i_0} P_{i_0 i_1} \cdots P_{i_{m-1} i_m}$$

قضیه - برای هر $m \in N$ و همهٔ حالتهای $i, j \in E$ و $n \in N$

$$P\{X_{n+m}=j \mid X_n=i\} = P^m_{ij}$$

یعنی احتمال اینکه زنجیره در m مرحله از حالت i به حالت j تغییر کند برابر با عنصر توان m ام ماتریس انتقال (تغییر وضعیت) P است.

$$P^{m+n} = P^m P^n$$

این معادله را معادلهٔ چپمن - کولموگروف می‌نامند.

قضیه - اگر Y تابعی از متغیرهای تصادفی $X_n, X_{n+1}, \dots$ باشد

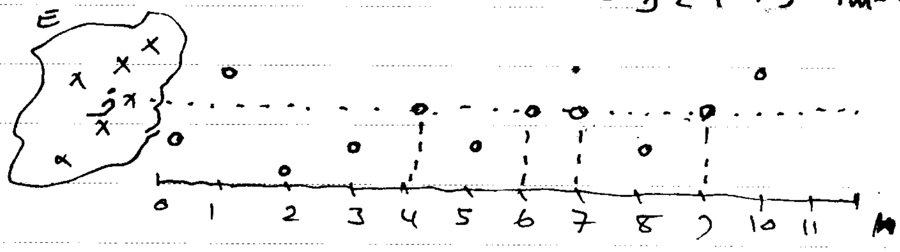
$$E\{Y \mid X_0, \dots, X_n\} = E\{Y \mid X_n\}$$

یعنی: به شرط آنکه حالت کنونی فرآیند معلوم باشد، حالت بعدی مستقل از گذشته است.

دیدار از یک حالت ثابت

قضیه - برای هر $i \in E$ و اعداد صحیح و نامنفی $k, m \geq 1$

$$P\{T_{m+1}-T_m=k \mid T_1,\dots,T_m\} = \begin{cases} 0 & \text{در } T_m=\infty \\ P_j\{T_1=k\} & \text{در } T_m=\infty \end{cases}$$



روش محاسبه: $F_k(i,j)=P_i\{T_1=k\}$, $i \in E$, $k=1,2,\dots$

برای $k=1$

$$F_k(i,j)=P_i\{T_1=1\}\,P_i\{X_1=j\}=P(i,j)$$

برای $k=2$

$$F_k(i,j)=P_i\{X_1\neq j,\dots,X_{k-1}\neq j,\ X_k=j\}$$

$$=\sum_b P_i\{X_1=b\}\,P_i\{X_2\neq j,\dots,X_{k-1}\neq j,\ X_k=j \mid X_1=b\}$$

براساس قانون احتمال شرطی

از معادله فوق چنین نتیجه می‌گیریم:

$$F_k(i,j)=\begin{cases} P(i,j) & k=1 \\ \sum_b P(i,b)\,F_{k-1}(b,j) & k\geq 2 \end{cases}$$

نتیجه: برای $k=1$، احتمال $F_1(i,j)$ برابر احتمال تغییر وضعیت و برای سایر مقادیر k از فرمول برگشت پذیر است.

Jamshid Nazemi

مثال: یک زنجیره مارکوف با ماتریس تغییر انتقال زیر را در نظر بگیرید.

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 3/5 & 1/15 \end{bmatrix}$$

فرض کنید $j=3$ و $i=1,2,3$

$$f_K(i)=F_K(i,j)$$

یعنی f_1 سومین ستون P است و برای $K\geq 2$

$$f_K=Q\,f_{K-1}$$

که در آن ماتریس Q از ماتریس P با قرار دادن صفر به جای هر ستون j ام آن به دست آید

$$Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 0 \\ 1/3 & 3/5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1/15 \end{bmatrix}\quad f_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1/18 \\ 1/5 \end{bmatrix}\quad f_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 1/108 \\ 1/30 \end{bmatrix},\ f_4=\begin{bmatrix} 0 \\ 1/648 \\ 1/180 \end{bmatrix},\dots$$

$$F_K(1,3)=0 \qquad K=1,2,\dots$$

$$F_K(2,3)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^{K-1} \qquad K=1,2,\dots$$

$$F_K(3,3)=\begin{cases} 1/15 & K=1 \\ \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{K-2}\left(\frac{1}{3}\right) & K=2,3,\dots \end{cases}$$

بنابراین با شروع از ۱، فرآیند هیچگاه به ۳ نمی‌رسد $P_1\{T_1=+\infty\}=1$

از ۲، احتمال ملاقات 3 در زمان K با احتمال = $(1/3)(1/6)^{K-1}$

است و لذا برای آنکه هیچگاه به ۳ نرسد $F_2=[T_1=+\infty]=1-P_2\{T_1<\infty\}$

$$=1-\sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^{K-1}=3/5$$

اگر از 3 شروع کند و هیچگاه به 3 نرسد $P_3\{T_1=+\infty\}=1-\sum_{K=1}^{\infty}P_3\{T_1=K\}=\frac{52}{75}$

Jamshid Nazemi

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: فرض کنید مجموع متغیرهای تصادفی مستقل را بصورت زیر مدل نمائیم.

$Y_1, Y_2, \dots$ متغیرهای تصادفی مستقل و توزیع احتمال $\{P_k, k=0,1,2,\dots\}$ باشند

$$\text{متغیر مجموع}\quad X_n = \begin{cases} 0 & n=0 \\ X_1+X_2+\dots Y_n & n\ge 1 \end{cases}$$

چون Y_i ها مستقل هستند بنابراین $X_{n+1}=X_n+Y_{n+1}$

$$P\{X_{n+1}=j \mid X_0,\dots,X_n\} = P\{Y_{n+1}=j-X_n \mid X_0,\dots,X_n\} = P_{j-X_n}$$

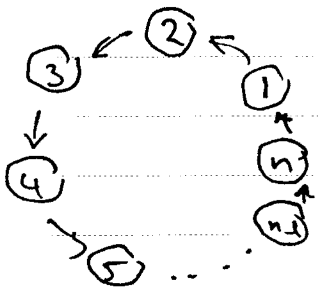
$$P(i,j)=P_{ij}=P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i\} = P_{j-i}\ .$$

$$P=\begin{bmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & \dots \\ & P_0 & P_1 & P_2 & \dots \\ & & P_0 & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

مثال: اگر متغیرهای تصادفی $Y_1, Y_2, \dots$ مستقل و دارای توزیع $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ و

$$X_{n+1}=X_n+Y_{n+1}$$

$$P=\begin{bmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & \dots & P_n \\ P_n & P_0 & P_1 & \dots & P_{n-1} \\ P_{n-1} & P_n & P_0 & P_1 & \dots \\ & & & \ddots & \\ P_1 & P_2 & P_3 & & P_0 \end{bmatrix}$$



در این حالت مجموع تمام سطرها و تمام ستونها برابر یک هستند

مثال : قطعه‌ای از یک دستگاه را در نظر بگیرید که اگر خراب شود، قطعه دیگر تعویض می‌شود و اگر یکبار خراب شود با قطعه جدید تعویض می‌شود.

اگر X_n باقیمانده عمر قطعه باشد و P_K احتمال زیر پیشامد باشد. $K=1,2,\dots$

$$P_{ij} = P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i\} = P\{X_{n+1}=j+1 \mid X_n=i\} = \begin{cases} 1 & j=i-1 \\ 0 & j\neq i-1 \end{cases}$$
$$\forall\, i \geq 1$$

$$P(0,j) = P_{0,j} = P\{X_{n+1}=j \mid X_n=0\} = P\{Z_{n+1}-1 \mid X_n=0\}$$
$$= P\{Z_{n+1}=j+1\} = P_{j+1}$$

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ & 1 & 0 & \dots \\ & & 1 & \dots \end{bmatrix}$$

یعنی جایگزینی هر قطعه در هر مقطع زمان K برابر یک (۱) است قطعه‌ها و احتمال باقیمانده عمر برابر یک (۱) واحد نشان ، دو واحد (۲) زمان به ترتیب $P_1, P_2, \dots$ است (ستونها در سطر اول)

تعاریف برای رده‌بندی و طبقه‌بندی حالتها

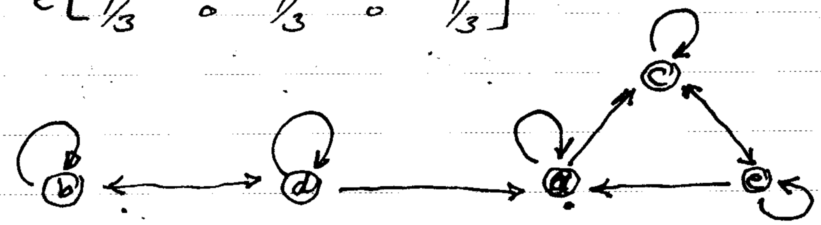
مجموعه بسته : مجموعه‌ای از حالتها را بسته می‌گوییم هرگاه هیچ حالتی خارج از آن قابل حصول از هیچ حالتی واقع در آن نباشد

حالت بسته : هر حالتی را که با خودش تشکیل یک مجموعه بسته بدهد حالت جاذب می‌نامند

حالت تحویل ناپذیر: یک مجموعه بسته را تحویل ناپذیر می‌گوییم هرگاه هیچ زیرمجموعه‌ای در آن بسته نباشد

مثال:

$$P = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \end{array}$$



مجموعه‌های بسته $\{a, c, e\}$ و $\{a, b, c, d, e\}$ بنابراین زنجیره تحویل ناپذیر نیست

$$Q = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

حذف ستون و سطر b و d
ماتریس مارکوف $\{a, c, e\}$ است

شکل جدید نمایش برای تحلیل ساده‌تر:

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} a \\ c \\ e \\ b \\ d \end{array}$$

Subject:

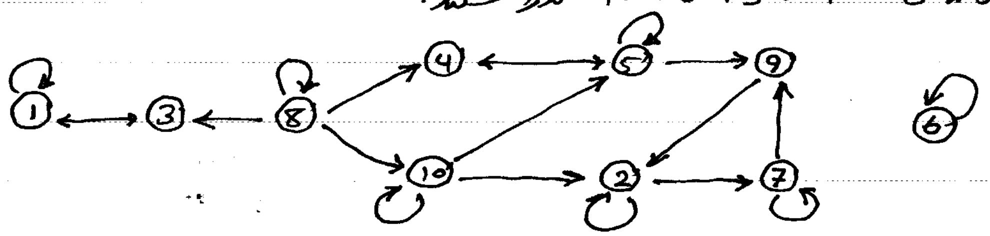
Year. Month. Date. ( )

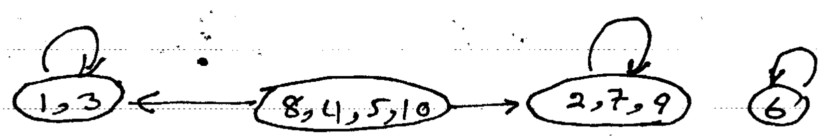
مثال:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10
\end{array}\\
P=\left[\begin{array}{cccccccccc}
1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 0\\
1 & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\
 & & & 1/3 & 1/3 & & & & 1/3 & 0\\
 & & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & & 1/4 & 0 & 3/4 & 0\\
 & & 1/4 & 1/4 & & & & 1/4 & & 1/4\\
 & 1 & & & & & & & & \\
 & 1/3 & & & 1/3 & & & & & 1/3
\end{array}\right]
\end{array}
$$

مجموعه‌های $\{1,3\}$ ، $\{2,7,9\}$, $\{6\}$ مجموعه‌های بسته و تحویل ناپذیر

حالتهای 4 ، 5 ، 8 ، 10 گذرا هستند.





$$
\left[\begin{array}{cccccccccc}
1 & & & & & & & & & \\
 & 1/2 & 1/2 & & & & & & & \\
 & 1 & 0 & & & & & & & \\
 & & & 1/3 & 2/3 & 0 & & & & \\
 & & & 0 & 1/4 & 3/4 & & & & \\
 & & & 1 & 0 & 0 & & & & \\
 & & & & & & 0 & 1 & 0 & 0\\
 & & & & & 1/3 & 1/3 & 1/3 & & \\
 & & 1/4 & & & & & & 1/4 & 1/4\\
 & & & 1/3 & & & & 1/3 & 0 & 1/3
\end{array}\right]
\begin{array}{c}
6\\1\\3\\2\\7\\9\\4\\5\\8\\10
\end{array}
$$

PAPCO

مثال: فرض کنید X یک زنجیرهٔ مارکوف در فضای حالت $E=\{1,2,3\}$ و با ماتریس احتمال زیر باشد

$$P=\begin{bmatrix}0.3 & 0.5 & 0.2\\ 0.6 & 0 & 0.4\\ 0 & 0.4 & 0.6\end{bmatrix}$$

توزیع احتمال هر حالت از حل معادلات زیر بدست می‌آید:

$$\pi P=\pi \quad , \quad \pi 1=1$$

$$\pi_1=\pi_1(0.3)+\pi_2\, 0.6$$
$$\pi_2=0.5\,\pi_1+0.4\,\pi_3$$
$$\pi_3=0.2\,\pi_1+0.4\,\pi_2+0.6\,\pi_3$$

$$\pi=\left(\tfrac{6}{23},\ \tfrac{7}{23},\ \tfrac{10}{23}\right)$$

$$P^{\infty}=\lim_{n\to\infty}P^n=\begin{bmatrix}6/23 & 7/23 & 10/23\\ 6/23 & 7/23 & 10/23\\ 6/23 & 7/23 & 10/23\end{bmatrix}$$

مثال: قدم برداشتن تصادفی: زنجیرهٔ مارکوف X با فضای حالت $E=\{0,1,\ldots\}$ و ماتریس احتمال زیر در نظر بگیرید

$$P=\begin{bmatrix}q & p & & \\ q & 0 & p & \\ & q & 0 & p\\ & & & \ddots\end{bmatrix}$$

$$\pi=\pi P \Rightarrow \begin{array}{l}\pi_0=\pi_0 q+\pi_1 q\\ \pi_1=\pi_0 p+\pi_2 q\\ \pi_2=\pi_1 p+\pi_3 q\end{array} \Rightarrow \begin{cases}\pi_1=p/q\\ \pi_2=(p/q)^2\\ \vdots\end{cases}$$

$$\pi=\left[1,\ p/q,\ (p/q)^2,\ (p/q)^3,\ldots\right]$$

روش مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

برای محاسبه P^m

اگر f بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ باشد که در معادله زیر صدق می‌کند.

$$Pf=\lambda f$$

و $N=[f_1,\dots,f_n]$ و D ماتریس قطری با عناصر قطری $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ است

$$P=NDN^{-1}$$

برای محاسبه توانهای ماتریس مفروض

$$P^2=NDN^{-1}NDN^{-1}=ND^2N^{-1}$$

و بنابر استقرا

$$P^K=ND^KN^{-1}\qquad K=0,1,\dots$$

برای محاسبه مقادیر ویژه P ، مجموع مقادیر ویژه P برابر است با مجموع درایه‌های قطری P

$$Tr(P)=\sum_i \lambda_i$$

و همچنین

$$Tr(P^K)=\sum_i \lambda_i^K \qquad K=0,1,\dots$$

لذا

$$N=\begin{bmatrix} f_1(1) & \dots & f_n(1) \\ f_1(n) & \dots & f_n(n)\end{bmatrix} \qquad N^{-1}=\begin{bmatrix} \pi_1(1) & \dots & \pi_1(n) \\ \pi_n(1) & \dots & \pi_n(n)\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حال اگر ماتریس B_K را به صورت زیر تعریف نماییم. زیرا $N^{-1}N = I$ لذا $\pi_j f_K = \begin{cases} 0 & j \neq K \\ 1 & j = K \end{cases}$

$$B_K = \begin{bmatrix} f_K(1)\pi_K(1) & \cdots & f_K(1)\pi_K(n) \\ f_K(n)\pi_K(1) & \cdots & f_K(n)\pi_K(n) \end{bmatrix}$$ = بردار سطری π_K * بردار ستونی f_K

$$B_j \cdot B_K = f_j \pi_j f_K \pi_j = \begin{cases} 0 & j \neq K \\ B_j & j = K \end{cases}$$

و در نتیجه:

$$P = \lambda_1 B_1 + \dots + \lambda_n B_n$$

و

$$P^K = \lambda_1^K B_1 + \dots + \lambda_n^K B_n$$

$$e^{tP} = \sum \frac{t^K}{K!} P^K = e^{t\lambda_1} B_1 + \dots + e^{t\lambda_n} B_n$$ و

مثال:

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

چون $P\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

لذا $\lambda = 1$ یک مقدار ویژه و $f_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ بردار ویژه متناظر است

از طرفی چون $Tr(P) = 1.5 = (0.8) + (0.7) = \lambda_1 + \lambda_2$

لذا $\lambda_2 = 0.5$

بردار ویژه سطری π_1 متناظر با $\lambda_1 = 1$ که شرط $\pi_1 f_1 = 1$ صدق کند

$$\pi_1 = (0.6, 0.4)$$

پس $B_1 = f_1 \pi_1$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

برای $K = 0$ $P^0 = I = B_1 + B_2$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.4 \\ -0.6 & 0.6 \end{bmatrix}$$

و $P^K = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} + (0.5)^K \begin{bmatrix} 0.4 & -0.4 \\ -0.6 & 0.6 \end{bmatrix}$ $K = 0, 1, \dots$

PAPCO

و در

$$P^{\infty} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: ماتریس P را که مولد یک فرآیند مارکوف سه حالتی است

$$P=\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & -6 \end{bmatrix}$$

مقدار ویژه $\lambda_1=0$ و بردار ویژه $f_1=1$, $\pi_1=(0.3,0.6,0.1)$

$$Tr(P)=-2-2-6=-10$$

$$Tr(P^2)=(4+2)+(2+4+6)+(6+36)=60$$ و

لذا روابط زیر صادق است.

$$\begin{cases} \lambda_2+\lambda_3=-10 \\ \lambda_2^2+\lambda_3^2=60 \end{cases} \Rightarrow \lambda_2^2+10\lambda_2+20=0$$

یا

$$\lambda_2=-5-\sqrt{5} \qquad \lambda_2=-5+\sqrt{5}$$

$$f_2=\begin{bmatrix} 3+\sqrt{5} \\ -2 \\ 3-3\sqrt{5} \end{bmatrix} , \quad \pi_2=\tfrac{1}{40}(3+\sqrt{5},-4,1-\sqrt{5})$$ و

$$\pi_2 f_2=1$$

$$\Rightarrow B_1=\begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$B_2=\frac{1}{20}\begin{bmatrix} 7+3\sqrt{5} & -6-2\sqrt{5} & -1-\sqrt{5} \\ -3-\sqrt{5} & 4 & -1+\sqrt{5} \\ -3-3\sqrt{5} & -6+6\sqrt{5} & 9-3\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

دقت کنید $B_1+B_2+B_3=P^0=I$

$$B_3=\frac{1}{20}\begin{bmatrix} 7-3\sqrt{5} & -6+2\sqrt{5} & -1+\sqrt{5} \\ -3+\sqrt{5} & 4 & -1-\sqrt{5} \\ -3+3\sqrt{5} & -6-6\sqrt{5} & 9+3\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$P^t=e^{tA}=B_1+e^{-(5-\sqrt{5})t}B_2+e^{-(5+\sqrt{5})t}B_3$$

و $P^\infty=B_1$