Jamshid Nazemi

Subject:

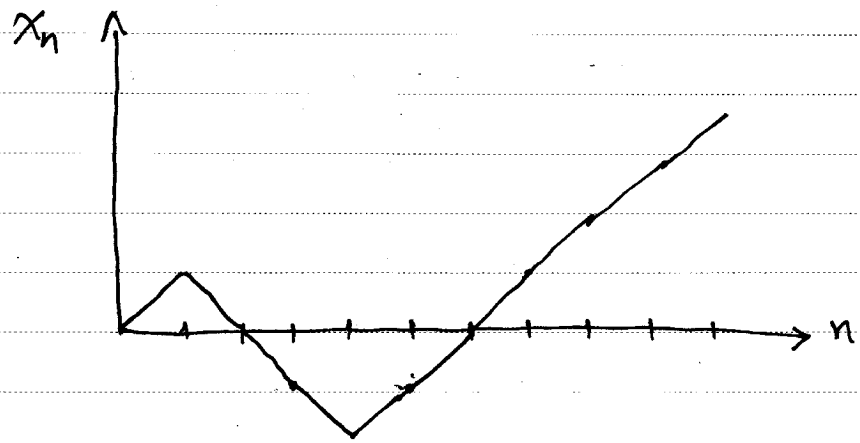
Year. Month. Date. ( )

Random walk To Markov chain

یک شی در حرکت در امتداد یک خط ساده‌ترین نوع حرکت تصادفی است که در آن

یک واحد به سمت راست با p ، یک واحد به سمت چپ با $q=1-p$ حرکت می‌کند.

برای سهولت در برداشت موضوع فرض کنید که هر گام در یک واحد زمان صورت می‌گیرد لذا nام گام در nام واحد زمانی صورت می‌گیرد.



روش ریاضی نمایش این مدل به صورت زیر است.

$$W_n = \begin{cases} +1 & \text{با احتمال } p \\ -1 & \text{با احتمال } q \end{cases}$$

و اگر موقعیت در لحظهٔ صفر x_0 باشد در آن صورت

$$X_n = x_0 + W_1 + W_2 + \dots + W_n$$

به این ترتیب: $x_n - x_0$: مجموع تغییرهای تصادفی برنولی

Jamshid Nazemi

Subject:
Year. Month. Date. ( )

سؤالاتی که پیش رو است عبارتند از:

- آیا به نقطه خاصی خواهد رسید که از قبل معین شده است؟
- چقدر طول می‌کشد که به آن نقطه برسد؟
- با چه تواتری ممکن است عبور از یک نقطه انجام شود؟

مثال: فرض کنید دو خدمت‌دهنده وجود دارد و ظرفیت سیستم $[0,c]$ است که در آن $c=a+b$

$a \geq 1$ و $b \geq 1$

حال اگر سرویس دهنده اول در وضعیت a باشد احتمال آنکه بعد از این تغییر اتفاقی مشتری به خدمت دهندگان به یکی از حالتهای صدی ۰ صفر یا c برسد چیست؟

احتمال آنکه وضعیت خدمت‌دهنده مذکور به صفر برسد قبل از آنکه c شود $= u_j$

در صورتیکه از وضعیت j شروع نماید.

طبق تعریف در هر گام تغییر [فرض کنید به ازای هر خروج از سیستم یک مشتری وارد می‌شود]

$$u_j = p\, u_{j+1} + q\, u_{j-1} \qquad 1 < j < c-1$$

این پیش شرط نیز وجود دارد که

$$u_0 = 1 \quad , \quad u_c = 0$$

این احتمالات از تعریف برمی‌آید زیرا $u_c=0$ است چون احتمال رسیدن به صفر قبل از رسیدن به وضعیت c در حالی که در وضعیت c قرار دارد صفر است و به همین ترتیب برای $u_0=1$

بقیه مسئله به روش خیلی است و دارای مسئله برای وضعیت a است ولی برای تمام حالتها حل می‌کنیم زیرا a نیز یک حالت اختیاری است.

$$u_j = p\,u_{j+1} + q\,u_{j-1} \quad , \quad p+q=1$$

به جای u_j مقدار مساوی قرار می‌دهیم.

$$p u_j + q u_j = p u_{j+1} + q u_{j-1} \Rightarrow q(u_j - u_{j-1}) = p(u_{j+1} - u_j)$$

به فرض

$$\Rightarrow r = \frac{q}{p} \quad , \quad d_j = u_j - u_{j+1} \Rightarrow \boxed{d_j = r\, d_{j-1}}$$

خواهیم داشت

به همین ترتیب با تکرار رابطه فوق خواهیم داشت:

$$d_j = r^j d_0$$

$$\begin{cases} d_1 = r\, d_0 \\ d_2 = r\, d_1 \\ \vdots \\ d_j = r\, d_{j-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_2 = r^2 d_0 \\ \vdots \\ d_j = r^j d_0 \end{cases}$$

$$1 = u_0 - u_c = \sum_{j=0}^{c-1} (u_j - u_{j+1}) = \sum_{j=0}^{c-1} d_j = \sum_{j=0}^{c-1} r^j d_0 = \frac{1-r^c}{1-r} d_0$$

به همین ترتیب

$$u_j = u_j - u_c = \sum_{i=j}^{c-1} (u_i - u_{i+1})$$

$$= \sum_{i=j} d_j = \sum_{i=j} r^i d_0 = \frac{r^j - r^c}{1-r} d_0$$

از دو رابطه فوق داریم

$$d_0 = \frac{1-r}{1-r^c}$$

$$u_j = \frac{r^j - r^c}{1-r^c} \qquad 0 \le j \le c \quad , \quad u_j = \frac{c-j}{c}$$

با تغییر $r \to 1/r$ ، $j \to c-j$ داریم

$$v_j = \frac{1-r^j}{1-r^c} \qquad v_j = \frac{j}{c}$$

احتمال آنکه خدمت‌دهنده فرصت c بار کافی از رسیدن به صفر

$$v_j =$$

Jamshid Nazemi

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تحرک

قضیه یک - برای هر قدم زدن تصادفی (با احتمال p)، عنصر در یک کدوره بسته نمی ماند.

این بدان مفهوم است که در یک بازهٔ زمانی، متحرک به نقاط جدیدی می‌رسد. این وقت را در بازیها به "دورهٔ بازی" تعبیر می‌کنند.

$S_0 =$ اولین زمان رسیدن متحرک به نقطهٔ مبدا یا c، فرض شروع از نقطهٔ i

قضیه دو - با شروع از هر نقطه در یک فرآیند قدم زدن تصادفی، عنصر متحرک یقیناً هر نقطه را بر هر تعداد عبور می‌کند

$i \to j$

این نگاه به حرکت متحرک مورد بحث مدل نظم چند زنجیرهٔ مارکوف است.

برای سادگی می‌توانیم داریم:

$$P(X_{S_a}=0)=p \qquad P(X_{S_a}=c)=1-p$$

$$E(X_{S_a}) = p\cdot 0 + (1-p)c = (1-p)c$$

$$E(X_n) = E(X_0)+E(\dots)+\dots = a$$

$$p = 1-\frac{a}{c} = \frac{b}{a+b}$$

این قانون در حالت تصادفی بودن حرکات و متوازن بودن آن (Symmetric) به حرکت براونی (Brownian motion) معروف است که در سال (1826) ذرات معلق در یک مایع و حرکت نیز آن آنها را مشاهده نمود.

Jamshid Nazemi

Subject:
Year. Month. Date. ( )

انیشتین در سال (1906) و اسلوچوفسکی در پی فهمند که علیرغم حرکات غیرعادی این ذرات می‌توان بردار حرکت را با قوانین احتمال پیش بینی نمود. بعداً وینر حرکت از قانون حد مرکزی در احتمال تبعیت نموده و توزیع نرمال برای این حرکت صادق است.

تعریف حرکت براونی Brownian motion

یک خانواده از متغیرهای تصادفی که برحسب زمان t در بازهٔ $[0,\infty]$ مرتب شده‌اند با شرایط زیر حرکت براونی دارند.

1) $X(0)=0$
2) $X(s_i+t_i)-X(s_i)$ فاصله بین دو متغیر، متغیرهای تصادفی مستقل است
3) $\forall s\geq 0 \quad t\geq 0,\ X(s+t)-X(s)$ دارای توزیع نرمال است. با مشخصهٔ $N(0,t)$

- مشخصهٔ (3) گام زدنهای متوازن را بیان می‌کند.
- مشخصهٔ (2) از این واقعیت برمی‌آید که فواصل از حرکتهای مستقل در بلوکهای منفک از هم صورت می‌گیرند.

احتمال انتقال

مدل حرکت تصادفی (گام زدن تصادفی) بوسیلهٔ زنجیرهٔ مارکوف تعمیم می‌یابد.

$$P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i\}=P_{ij}$$

تعریف زنجیرهٔ مارکوف:

یک فرایند تصادفی X_n را زنجیرهٔ مارکوف همگن یا زنجیرهٔ مارکوف با احتمال انتقال ثابت می‌خوانیم اگر

$$P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i\} = P_{ij}$$

و به همین ترتیب

$$P\{\cdots i_0 \to i_1 \to i_2 \to \cdots i_n\} = P_{i_0 i_1} P_{i_1 i_2} \cdots P_{i_{n-1} i_n}$$

مثال:

$$P\{X_4=j, X_5=k, X_6=l \mid X_3=i\} =$$

$$P\{X_4=j \mid X_3=i\} P\{X_5=k \mid X_3=i, X_4=j\} P\{X_6=l \mid X_3=i, X_4=j, X_5=k\} =$$

$$P\{X_4=j \mid X_3=i\} P\{X_5=k \mid X_4=j\} P\{X_6=l \mid X_5=k\} = P_{ij} P_{jk} P_{kl}$$

حالت خاص:

اگر

$$P_{ij} = P_j$$

که در آن متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع مشابه هستند.

حال اگر احتمال انتقال را با $P_{ij}^{(n)}$ را از i به j در n مرحله انجام دهیم.

$$P_{ij}^{(n)} = P\{X_n=j \mid X_0=i\}$$

همچنین برای $n \geq 1$ داریم:

$$P_{ik}^{(n)} = \sum_j P_{ij} P_{jk}^{(n-1)} = \sum_j P_{ij}^{n-1} P_{jk}$$

برای $n=2$

$$P_{ik}^{(2)} = \sum_j P_{ij} P_{jk}$$

روابط فوق حاکی از آنست که می‌توان از ماتریس برای احتمال انتقال استفاده نمود.

$$\Pi = [P_{ij}]$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & \cdots & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & \cdots & \cdots \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

به همین ترتیب داریم:

$$\Pi^2 = \Pi \times \Pi = [P_{ij}^{(2)}]$$

$$\Pi^n = \Pi \times \Pi^{n-1} = \Pi^{n-1} \times \Pi = [P_{ij}^{(n)}]$$

لذا ماتریس Π^n را ماتریس انتقال n مرحله‌ای می‌خوانیم.

مثال: اگر دامنه حرکت $I = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ باشد

$$P_{ij} = \begin{cases} p & \text{اگر } j = i+1 \\ q & j = i-1 \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \quad \vdots \quad \Pi = \begin{bmatrix} \cdots & & & \\ q & 0 & p & \\ & q & 0 & p \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

که در آن $p+q=1$ است. این ماتریس معادل ~~حالت~~ قدم زدن تصادفی آزاد است.
Free random walk

اگر p یا q صفر شود در آنصورت قدم زدن از حالت تصادفی به حالت معین تغییر می‌یابد.

مثال: اگر $I = \{0, 1, 2, \dots\}$ باشد

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & \cdots \\ & q & 0 & p & \cdots \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

مثال: $I = \{0, 1, \dots, c\}$

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & & \\ & q & 0 & p & \\ & & \cdots & & \\ & & & q & 0 & p \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P_{00} = 1 \qquad P_{cc} = 1$$

مثال: اگر در مثال فوق $P_{01} = 1$ ، $P_{c,c-1} = 1$ باشد در این صورت

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & & \\ & q & 0 & p & \\ & & \ddots & & \\ & & & q & 0 & p \\ & & & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

این ماتریس بیانگر آنست که در صورت رسیدن به نقاط مرزی ۰ و c ، برگشت به داخل صورت نمی‌گیرد لذا چرخه‌ها تمام نمی‌شود.

مثال: می‌توان $P \geq 0$ ، $q \geq 0$ ، $r \geq 0$ و $p + q + r = 1$ را بدین صورت اعمال نمود که در روابط فوق سطرها را به صورت زیر تبدیل نمود.

$$(\cdots q\ 0\ p \cdots) \rightarrow (\cdots q\ r\ p \cdots)$$

تفسیر: به این مدل سرباز بدون حافظه حرکت به جلو، حرکت به عقب و درجا زدن